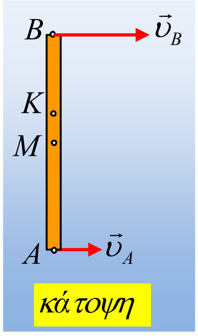
Η γωνιακή ταχύτητα και ο άξονας περιστροφής.

Μια δοκός μήκους 2m, κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο και σε μια στιγμή βρίσκεται στη θέση του διπλανού σχήματος (κάτοψη). Στη θέση αυτή οι ταχύτητες των δύο άκρων Α και Β της δοκού, είναι κάθετες στη δοκό με μέτρα υ_A=0,8m/s, υ_B=1,8m/s.



i) Η κίνηση της δοκού είναι:

α) Μεταφορική,

β) στροφική,

γ) σύνθετη.

ii) Αν η δοκός είναι ομογενής, τότε η γωνιακή ταχύτητα της δοκού έχει μέτρο:

α) ω=0,3rad/s, β) ω=0,5rad/s, γ) ω=0,7rad/s.

iii) Αν το κέντρο μάζας της δοκού είναι το σημείο Κ, όπου (ΚΜ)=0,2m, τότε αποδεχόμενοι ότι η δοκός περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το Κ, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της έχει μέτρο:

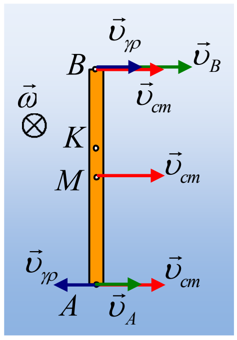
α) ω=0,3rad/s, β) ω=0,5rad/s, γ) ω=0,7rad/s.

Απάντηση:

i) Από τη στιγμή που οι ταχύτητες των δύο σημείων είναι άνισες, η κίνηση δεν είναι μεταφορική. Για να είναι η κίνηση μόνο στροφική, θα πρέπει να υπάρχει ένα ακίνητο σημείο της δοκού, ενώ τα υπόλοιπα να έχουν γραμμικές ταχύτητες $\upsilon_{\gamma\rho}$=ω·R. Αλλά και πάλι τέτοιο σημείο δεν υπάρχει, αφού τα άκρα Α και Β κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση.

Άρα δεν μένει παρά να αντιμετωπίσουμε την κίνηση ως σύνθετη.

ii) Αν η δοκός είναι ομογενής, τότε το κέντρο μάζας της βρίσκεται στο μέσον της Μ, συνεπώς $\upsilon_M = \upsilon_{cm}$, ενώ τα άκρα Α και Β θα έχουν επιπλέον και μια γραμμική ταχύτητα μέτρου $\upsilon_{\gamma\rho}=\omega\cdot R=\omega\frac{\ell}{2}$. Αλλά τότε για να μπορεί το άκρο Β να έχει μεγαλύτερη ταχύτητα (και το Α μικρότερη) από την ταχύτητα του κέντρου μάζας, θα πρέπει η δοκός να στρέφεται με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού (δεξιόστροφα) και οι ταχύτητες των άκρων, να είναι όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε για τα μέτρα των ταχυτήτων έχουμε:



$$\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\omega\frac{\ell}{2} \text{ και } \upsilon_A=\upsilon_{cm}-\omega\frac{\ell}{2}$$

και με αντικατάσταση παίρνουμε:

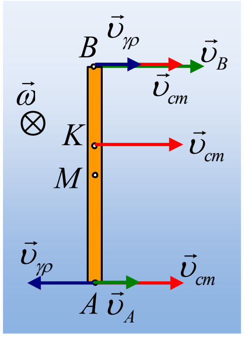
$$\left.\begin{aligned}1{,}8&=\upsilon_{cm}+\omega\cdot 1\\0{,}8&=\upsilon_{cm}-\omega\cdot 1\end{aligned}\right\}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$$2\upsilon_{cm}=2{,}6m/s \text{ ή } \upsilon_{cm}=1{,}3m/s$$

Αλλά τότε ω=0,5rad/s. Σωστή η β) πρόταση.

iii) Έστω τώρα ότι η δοκός στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το Κ. Η ταχύτητα τώρα του σημείου Κ, είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας $\upsilon_\kappa=\upsilon_{cm}$ και στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι ταχύτητες των δύο άκρων της.



Αλλά τότε για τα μέτρα των ταχυτήτων έχουμε:

$$\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\omega(BK) \text{ και } \upsilon_A=\upsilon_{cm}-\omega(AK)$$

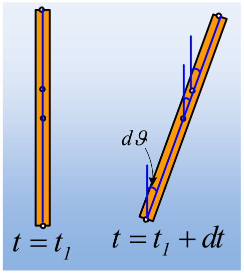
και με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l}1{,}8=\upsilon_{cm}+\omega\cdot 0{,}8\\ 0{,}8=\upsilon_{cm}-\omega\cdot 1{,}2\end{array}\right\}$$ Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο εξισώσεων έχουμε:

$$2\omega=1rad/s \text{ ή } \omega=0{,}5rad/s$$

Σωστή η β) πρόταση.

Σχόλιο:



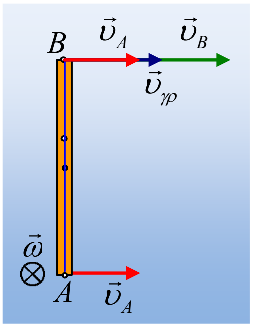
Βλέπουμε μια δοκό να κινείται όπως μας δόθηκε παραπάνω. Αλλά δεν ξέρουμε αν είναι ομογενής ή όχι, που σημαίνει ότι δεν γνωρίζουμε το κέντρο μάζας της.

Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής;

Η γωνιακή ταχύτητα δεν συνδέεται με τον άξονα περιστροφής. Ως προς οποιοδήποτε άξονα και αν μελετήσουμε την περιστροφή, η γωνιακή ταχύτητα θα είναι η ίδια! Η γωνιακή ταχύτητα συνδέεται με την αλλαγή του προσανατολισμού του στερεού και η γωνία στροφής θα είναι πάντα ίδια, είτε την μετρήσουμε στο σημείο Κ, είτε στο Μ, είτε στο άκρο Α.

Άλλωστε πώς ορίζεται;

$$\omega=\frac{d\vartheta}{dt}$$



Για επιβεβαίωση (αν κάποιος δεν πείθεται!!!) ας «φανταστεί» ότι στο άκρο Α υπάρχει ένας πραγματικός (αλλά αόρατος!!!) άξονας που μετακινείται προς τα δεξιά έχοντας ταχύτητα $\upsilon_{\alpha\xi}=\upsilon_A=0{,}8m/s$. Αν η ταχύτητα του άκρου Β είναι 1,8m/s, ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου;

Το άκρο Β συμμετέχει στη μεταφορική κίνηση του άξονα, συνεπώς έχει ταχύτητα το διανυσματικό άθροισμα: $\vec{\upsilon}_B=\vec{\upsilon}_A+\vec{\upsilon}_{\gamma\rho}$ →

$$\upsilon_B=\upsilon_A+\omega\cdot\ell \rightarrow$$

$$\omega=\frac{\upsilon_B-\upsilon_A}{\ell}=\frac{1{,}8-0{,}8}{2}rad/s=0{,}5rad/s$$

Και πάλι δηλαδή, θα υπολογίζει την ίδια γωνιακή ταχύτητα!

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης