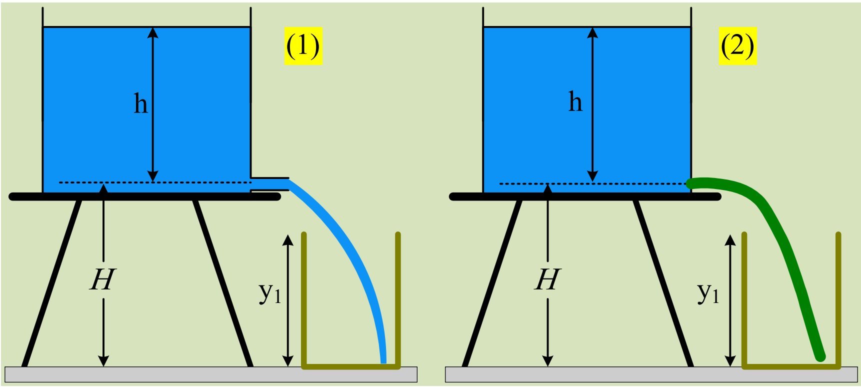
Δύο εναλλακτικοί τρόποι άντλησης νερού



Από ένα υπερυψωμένο μεγάλο ντεπόζιτο, το οποίο περιέχει νερό σε ύψος h, πρόκειται να αντλήσουμε νερό για να γεμίσουμε ένα άδειο δοχείο όγκου V. Στο σχήμα βλέπουμε δύο ενδεχόμενα, όπου στο (1) στο κάτω μέρος του δοχείου υπάρχει ένας μικρός οριζόντιος σωλήνας διατομής Α. Στο (2) έχουμε συνδέσει, στην ίδια θέση ένα λάστιχο εσωτερικής διατομής Α, το οποίο καταλήγει στον πυθμένα του δοχείου.

i) Μόλις αρχίσει η ροή, το νερό θα φτάσει με μεγαλύτερη ταχύτητα στον πυθμένα:

α) του πρώτου δοχείου, β) του δεύτερου δοχείου, γ) θα φτάσει με την ίδια ταχύτητα και στα δυο δοχεία.

ii) Η αρχική παροχή θα είναι ίση και στις δυο περιπτώσεις ή όχι;

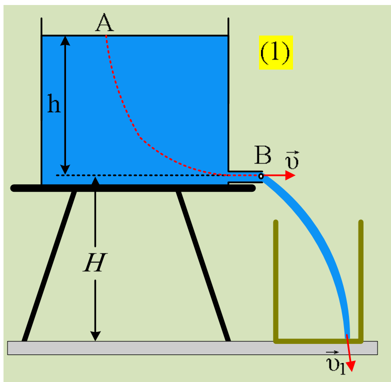
iii) Η ταχύτητα ανόδου της επιφάνειας του νερού στο πρώτο δοχείο παραμένει σταθερή ή όχι;

iv) Ποιο δοχείο θα γεμίσει πρώτο;

Να δικαιολογήσετε αναλυτικά τις απαντήσεις σας, θεωρώντας τις ροές μόνιμες και στρωτές ροές ενός ιδανικού ρευστού.

Απάντηση:

i) Έστω ότι το νερό εξέρχεται από το άκρο Β του οριζόντιου σωλήνα με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ όπως στο σχήμα. Με δεδομένο ότι το ντεπόζιτο έχει μεγάλη επιφάνεια, μπορούμε να δεχτούμε ότι η ταχύτητα της επιφάνειας (σημείο Α) είναι μηδενική, ενώ έχουμε ακόμη $p_A=p_B=p_{ατμ}$ και η εξίσωση Bernoulli από το Α στο Β μας δίνει:



$$p_A + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho \upsilon^2 \rightarrow$$

$$\upsilon = \sqrt{2gh}$$

Αν τώρα εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας για μια μικρή ποσότητα νερού μάζας δm, από το Β, μέχρι να φτάσει στον πυθμένα του δοχείου, θα πάρουμε:

$$K_B+U_B=K_\pi+U_\pi \rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\delta m \cdot \upsilon^2 + \delta m \cdot gH = \frac{1}{2}\delta m \cdot \upsilon_1^2 + 0 \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon^2 + 2gH} = \sqrt{2gh + 2gH} = \sqrt{2g(H+h)} \ \ (\alpha)$$

Η σχέση (α) θα μπορούσε να εξαχθεί θεωρώντας μια ρευματική γραμμή από την επιφάνεια (σημείο Α) μέχρι τον πυθμένα του δοχείου, οπότε η εξίσωση Bernoulli, θα μας έδινε:

$$p_A + \rho g(h+H) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 = p_\pi + \frac{1}{2}\rho\upsilon_\pi^2 \ \rightarrow$$

$$\upsilon_\pi = \upsilon_1 = \sqrt{2g(H+h)}$$

Όμως η ίδια παραπάνω απόδειξη, θα μας έδινε και την ταχύτητα ροής στην περίπτωση (2), οπότε ξανά θα βρίσκαμε:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(H+h)}$$

Συνεπώς $\upsilon_1 = \upsilon_2$ και σωστή απάντηση η γ).

ii) Η παροχή στην περίπτωση (1) είναι:

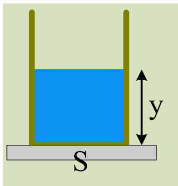
$$\Pi_1 = A\upsilon = A\sqrt{2gh} \ \ (\beta)$$

Η αντίστοιχη παροχή, μέσω του λάστιχου είναι:

$$\Pi_2 = A\upsilon_2 = A\sqrt{2g(H+h)} \ \ (\gamma)$$

Παρατηρούμε ότι $\Pi_2 > \Pi_1$.

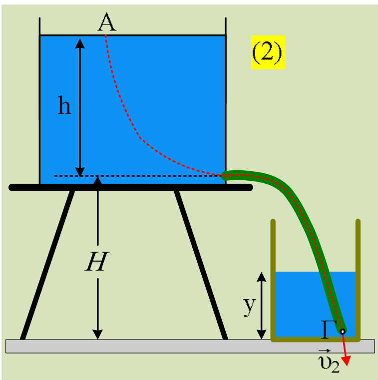
iii) Στην πρώτη περίπτωση η παροχή παραμένει σταθερή και ίση με $\Pi_1 = A\sqrt{2gh}$, αλλά και $\Pi_1 = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ όπου ΔV η μεταβολή και του όγκου του νερού στο δοχείο, για την οποία ισχύει $\Delta V = S \cdot \Delta y$ όπου S το εμβαδόν της βάσης του δοχείου και Δy η αύξηση του ύψους. Αλλά τότε η ταχύτητα ανόδου της στάθμης του νερού, θα είναι ίση:



$$u = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{S\Delta t} = \frac{\Pi}{S}$$

Άρα η ταχύτητα ανόδου της στάθμης του νερού στο πρώτο δοχείο παραμένει σταθερή.

iv) Ενώ στο πρώτο δοχείο έχουμε σταθερή παροχή, στο δεύτερο, ξεκινώντας μια παροχή με τιμή



$$\Pi_2 = A\upsilon_2 = A\sqrt{2g(H+h)}$$

η παροχή μειώνεται με την πάροδο του χρόνου. Πράγματι, αν πάρουμε μια τυχαία στιγμή, όπου υπάρχει νερό στο δοχείο σε ύψος y, η εξίσωση Bernoulli μεταξύ Α και Γ δίνει:

$$p_A + \rho g(h+H) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_A^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$$

Αλλά $p_\Gamma = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g y$, οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$p_{\alpha\tau\mu} + \rho g(h+H) + 0 = p_{\alpha\tau\mu} + \rho g y + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \ \rightarrow$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(H+h-y)}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι μειώνεται διαρκώς η ταχύτητα εκροής, άρα μειώνεται και η παροχή. Αλλά η ελάχιστη τιμή της παροχής θα είναι τη στιγμή που γεμίζει το δοχείο, με ύψος y_1, με τιμή:

$$\Pi_{2,min} = A\upsilon_{2,\min} = A\sqrt{2g(H+h-y_1)} \ \text{(δ)}$$

Από την σύγκριση των σχέσεων (β) και (δ) αφού $H-y_1>0$, προκύπτει ότι η ελάχιστη παροχή στο δεύτερο δοχείο είναι μεγαλύτερη από την (σταθερή) παροχή στο πρώτο δοχείο. Άρα το δεύτερο δοχείο θα γεμίσει σε μικρότερο χρόνο, αφού κάθε στιγμή θα ισχύει $\Pi_2>\Pi_1$.

dmargaris@gmail.com