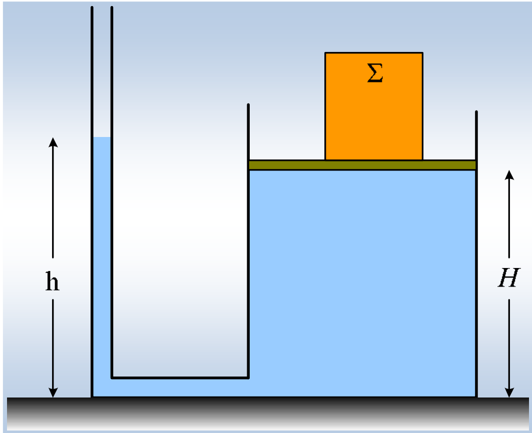
Μια «ιδιόμορφη ζυγαριά».



Το δεξιό κυλινδρικό δοχείο του σχήματος κλείνεται με έμβολο, εμβαδού Α=0,6m^2 και αμελητέου βάρους και περιέχει νερό μέχρι ύψος Η=50cm. Το δοχείο συνδέεται με λεπτό κατακόρυφο σωλήνα, όπως στο σχήμα, στον οποίο το νερό φτάνει μέχρι ύψος h.

i) Για το ύψος h του νερού (χωρίς το σώμα Σ στο έμβολο) στον λεπτό σωλήνα, ισχύει:

α) h < H, β) h=H, γ) h > H.

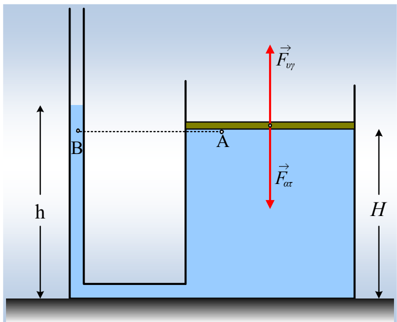
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Τοποθετούμε πάνω στο έμβολο ένα σώμα Σ, βάρους w=600Ν. Για να μην μετακινηθεί το έμβολο, προτείνεται να προσθέσουμε νερό στον σωλήνα. Να υπολογισθεί το νέο ύψος της στήλης h_1 στο σωλήνα, ώστε να μην μετακινηθεί το έμβολο, παραμένοντας σε ύψος Η.

iii) Να υπολογιστεί το βάρος του νερού που προσθέσαμε στο σωλήνα, για να εξισορροπήσει την τοποθέτηση του σώματος Σ, πάνω στο έμβολο, αν ο σωλήνας έχει διατομή με εμβαδόν S=4cm^2.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m^3 και g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο έμβολο, όπου $\vec{F}_{ατ}$ η δύναμη από την ατμόσφαιρα και $\vec{F}_{υγ}$ η δύναμη από το υγρό. Το έμβολο ισορροπεί, οπότε:

$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow F_{υγ}=F_{ατ} \rightarrow p_A \cdot A = p_{ατ} \cdot A \rightarrow$$

$$p_A = p_{ατ}$$

Όπου p_A η πίεση στην κάτω επιφάνεια του εμβόλου ή ισοδύναμα στην άνω επιφάνεια του υγρού στο δοχείο.

Αλλά παίρνοντας τα σημεία Α και Β, όπως στο σχήμα, στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο η πίεση έχει την ίδια τιμή, οπότε:

$$p_B = p_A = p_{ατμ}.$$

Αλλά τότε δεν υπάρχει νερό στο σωλήνα, πάνω από το σημείο Β ή ισοδύναμα το νερό στο σωλήνα φτάνει σε ύψος h=Η (αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων). Σωστό το β).

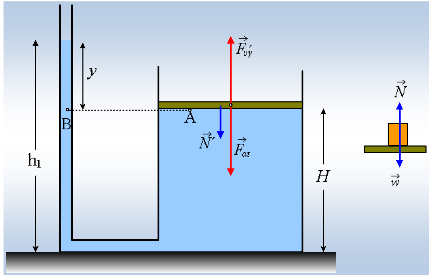
ii) Δεξιά, στο παρακάτω σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις στο σώμα Σ, το οποίο ισορροπεί.

$$\Sigma\vec{F} = 0 \rightarrow N = w = 600N$$

Αλλά τότε από την ισορροπία του εμβόλου, το οποίο εκτός της δύναμης από την ατμόσφαιρα και το υγρό, δέχεται και την αντίδραση της Ν, την Ν΄, παίρνουμε:

$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow F_{\upsilon\gamma}=N'+F_{\alpha\tau} \rightarrow p'_A A=N'+p_{\alpha\tau}A \rightarrow$$

$$p'_A=p_{\alpha\tau}+\frac{N'}{A} \quad (1)$$



Αλλά και πάλι οι πιέσεις στα σημεία Α και Β είναι ίσες, οπότε:

$$p'_A=p'_B \rightarrow p_{\alpha\tau}+\frac{N'}{A}=p_{\alpha\tau}+\rho g y$$

$$y=\frac{N'}{\rho g A}=\frac{600}{1.000\cdot 10\cdot 0{,}6}m=0{,}1m$$

Όπου y το ύψος του νερού, πάνω από το σημείο Β.

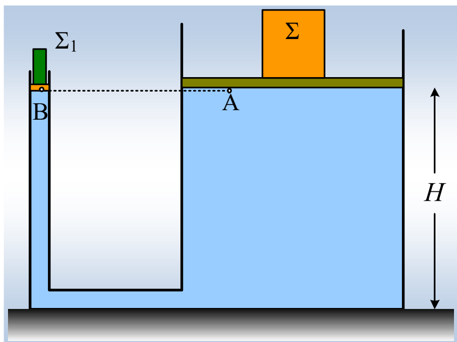
Έτσι για το ύψος του νερού στο σωλήνα θα έχουμε:

$$h_1=H+y=50cm+10cm=60cm=0{,}6m$$

iii) Ο όγκος του νερού που προσθέσαμε στο σωλήνα, για να μην μετακινηθεί το έμβολο, είναι ίσος με τον όγκο κυλίνδρου βάσης S και ύψους y. Αλλά τότε για το βάρος του προστιθέμενου νερού έχουμε:

$$w_1=mg=\rho Vg=\rho\cdot Sy\cdot g=1.000\cdot 4\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}1\cdot 10N=0{,}4N$$

Σχόλιο



Η παραπάνω κατάσταση είναι ισοδύναμη, με το να θεωρήσουμε ότι στο σημείο Β είχαμε ένα δεύτερο έμβολο, όπου πάνω του τοποθετούσαμε ένα σώμα Σ_1 βάρους w_1 για να εξισορροπήσουμε το βάρος του σώματος Σ, όπως στο διπλανό σχήμα. Αλλά τότε αυτό δεν είναι τίποτα άλλο, παρά ένας υδραυλικός ανυψωτήρας, όπου με εφαρμογή του νόμου του Pascal θα πάρουμε:

$$\frac{w_1}{S}=\frac{w}{A} \rightarrow w_1=w\frac{S}{A}=600\frac{4\cdot 10^{-4}}{0{,}6}N=0{,}4N$$

Παραπάνω αντί στο σωλήνα να έχουμε έμβολο και σώμα Σ_1, προσθέσαμε νερό ίσου βάρους, με αποτέλεσμα να ανέβη η στήλη…

dmargaris@gmail.com