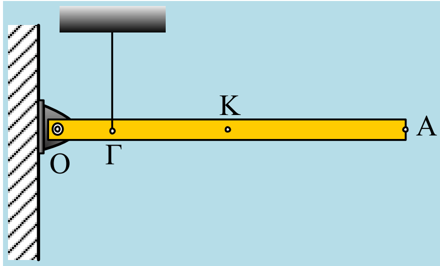
Να αυξήσουμε την επιτάχυνση του άκρου της δοκού



Μια ομογενής δοκός ΟΑ, μήκους ℓ=3m και μάζας m=10kg, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από άρθρωση στο άκρο της Ο και ισορροπεί σε οριζόντια θέση δεμένη με κατακόρυφο νήμα, όπως στο σχήμα, όπου (ΟΓ)=0,5m.

i) Να υπολογιστεί η τάση του νήματος.

ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα. Να υπολογιστεί η αρχική επιτάχυνση του άκρου Α της δοκού.

iii) Υποστηρίζεται ότι αν πριν το κόψιμο του νήματος τοποθετήσουμε στο σημείο Δ, όπου (ΔΑ)=1m ένα σώμα $Σ_1$ αμελητέων διαστάσεων και μάζας m_1=5kg, μπορούμε να επιτύχουμε την αύξηση της επιτάχυνσης του άκρου Α της δοκού. Να εξετάσετε αν η άποψη αυτή είναι σωστή ή όχι.

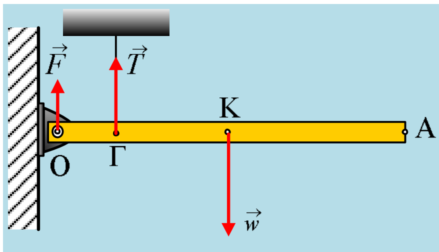
iv) Τοποθετούμε στο σημείο Γ ένα άλλο υλικό σημείο $Σ_2$, αμελητέων διαστάσεων, μάζας m_2, με αποτέλεσμα μόλις κόψουμε το νήμα η αρχική επιτάχυνση του άκρου Α να έχει μέτρο $α_2$=2g. Να βρεθούν:

α) Η μάζα του υλικού σημείου Σ.

β) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ ως προς το άκρο Ο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της I_{cm}= $mℓ^2/12$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:

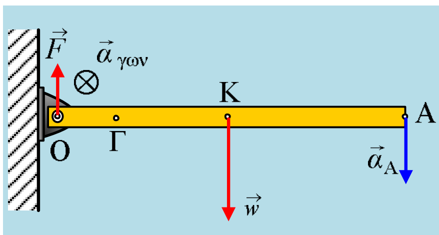


i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό. Από τη συνθήκη ισορροπίας της δοκού παίρνουμε:

$$Στ_o=0 \rightarrow T\cdot(OΓ)-w\cdot(OK)=0 \rightarrow$$

$$T = mg\frac{(OK)}{(OΓ)} = 10 \cdot 10\frac{1,5}{0,5}N = 300N$$

ii) Εφαρμόζοντας το 2° νόμο του Νεύτωνα για την περιστροφή της δοκού ως προς την άρθρωσή της στο άκρο Ο, μόλις κοπεί το νήμα, παίρνουμε:



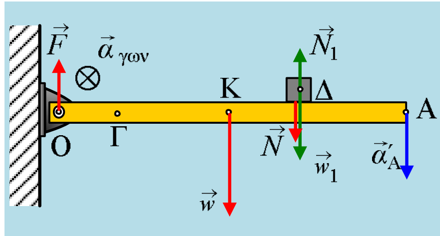
$$Στ_o=I_o\cdot α_{γων} \rightarrow mg\cdot ½\, ℓ=I_o\cdot α_{γων}, \text{ όπου}$$

$$I_o=I_{cm}+md^2=\frac{1}{12}mℓ^2 + m\left(\frac{ℓ}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mℓ^2$$

Οπότε $α_{γων} = \frac{mg\cdot {}^1/_2 ℓ}{{}^1/_3 mℓ^2} = \frac{3g}{2ℓ}$, ενώ το άκρο Α της ράβδου έχει επιτάχυνση:

$$α_A = α_{γων}ℓ = \frac{3g}{2ℓ}ℓ = 1,5g = 15m/s^2$$

iii) Το ερώτημα που μπαίνει είναι αν, η τοποθέτηση του σώματος μάζας m_1 στο σημείο Δ, θα έχει σαν αποτέλεσμα αυτό να κινηθεί μαζί με τη δοκό ή αν τα δυο σώματα θα κινηθούν ανεξάρτητα.



Ας υποθέσουμε ότι τα δυο σώματα κινούνται μαζί, σαν ένα σώμα. Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα δυο σώματα, μόλις αφεθούν να κινηθούν. Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο το Νεύτωνα, για κάθε σώμα, παίρνουμε:

Για το σώμα $Σ_1$: $ΣF=m_1 \cdot α_1 \rightarrow m_1g-N_1=m_1 \cdot α_1$ (1)

Για τη δοκό: $Στ=I_o \cdot α'_{γων} \rightarrow mg\frac{\ell}{2}+N\cdot(ΟΔ)=\frac{1}{3}m\ell^2\cdot α'_{γων}$ (2)

Αλλά $N=N_1$ (δράση αντίδραση), ενώ αφού υποθέσαμε ότι τα δυο σώματα κινούνται μαζί, η επιτάχυνση του σώματος $Σ_1$ είναι ίση με την επιτάχυνση του σημείου Δ της δοκού, δηλαδή:

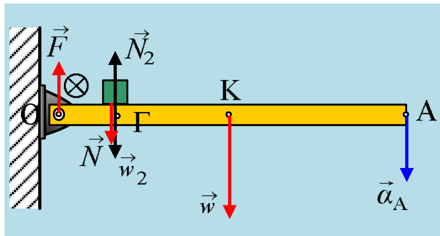
$$α_1=α'_{γων}(ΟΔ)=α'_{γων}\cdot\frac{2\ell}{3} \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στην (2) και χρήση της (3) παίρνουμε:

$$mg\frac{\ell}{2}+(m_1g-m_1α_1)\frac{2\ell}{3}=\frac{1}{3}m\ell^2\cdot\frac{3α_1}{2\ell}\rightarrow$$

$$α_1=10m/s^2.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μας λέει, ότι το σώμα $Σ_1$ εκτελεί ελεύθερη πτώση, μη δεχόμενο δύναμη στήριξης ($N=0$), αλλά τότε δεν ασκεί και δύναμη στη δοκό, η οποία αποκτά ξανά την ίδια γωνιακή επιτάχυνση, με αποτέλεσμα και το άκρο Α να αποκτά την ίδια επιτάχυνση ($α_A=15m/s^2$). Άρα η άποψη ότι έτσι θα αυξηθεί η επιτάχυνση του άκρου Α, δεν ευσταθεί.



iv) Τοποθετώντας το σώμα $Σ_2$ στο σημείο Γ, θα έχουμε τις δυνάμεις του διπλανού σχήματος να ασκούνται στα σώματα, μόλις κοπεί το νήμα. Αφού δίνεται αύξηση της επιτάχυνσης του άκρου Α, σημαίνει ότι τώρα προφανώς υπάρχει αλληλεπίδραση του σώματος $Σ_2$ και της δοκού. Αλλά τώρα η επιτάχυνση του άκρου Α συνδέεται με την νέα γωνιακή επιτάχυνση με την σχέση:

$$α_{A,2}=α_{γων,2}\ell\rightarrow α_{γων,2}=\frac{α_{A,2}}{\ell}=\frac{2\cdot 10}{3}rad/s^2=\frac{20}{3}rad/s^2$$

Όμως και πάλι ισχύουν οι εξισώσεις (1), (2) και (3) με τη μορφή:

Για το σώμα $Σ_2$: $ΣF=m_2\cdot α_2 \rightarrow m_2g-N_2=m_2\cdot α_2$ (1α)

Για τη δοκό: $Στ=I_o\cdot α_{γων,2} \rightarrow mg\frac{\ell}{2}+N\cdot(ΟΓ)=\frac{1}{3}m\ell^2\cdot α_{γων,2}$ (2α)

Αλλά $N=N_2$ (δράση αντίδραση), ενώ η επιτάχυνση του σώματος $Σ_2$ είναι ίση με την επιτάχυνση του σημείου Γ της δοκού, δηλαδή:

$$α_2=α_{γων,2}(ΟΓ) \quad (3α)$$

α) Έτσι από την ($3^α$) η επιτάχυνση του $Σ_2$ έχει μέτρο:

$$α_2=α_{γων,2}(ΟΓ)=\frac{20}{3}\cdot\frac{1}{2}m/s^2=\frac{10}{3}m/s^2$$

Ενώ από την (2 α) βρίσκουμε:

$$N = \frac{\frac{1}{3}m\ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,2} - mg\frac{\ell}{2}}{(O\Gamma)} = \frac{\frac{1}{3}10 \cdot 3^2 \cdot \frac{20}{3} - 10 \cdot 10\frac{3}{2}}{0{,}5}N = 100N$$

Και επιστρέφοντας στην (1) παίρνουμε:

$$m_2 = \frac{N_2}{g - a_2} = \frac{100}{10 - {}^{10}/_{3}}kg = 15kg$$

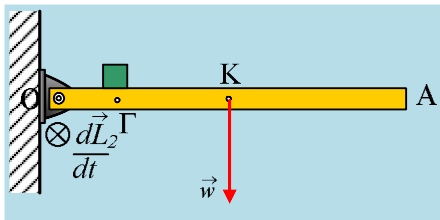
β) Ο αρχικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ_2 μπορεί να αντιμετωπισθεί με δυο εναλλακτικούς τρόπους.

β_1) θεωρώντας το τμήμα ενός στερεού (δοκός και Σ_2) αφού κινούνται μαζί. Αλλά τότε:

$$\frac{dL_{2,o}}{dt} = \Sigma\tau = I_{2,o}\alpha_{\gamma\omega\nu,2} = m_2(O\Gamma)^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,2} \rightarrow$$

$$\frac{dL_{2,o}}{dt} = m_2(O\Gamma)^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu,2} = 15 \cdot (0{,}5)^2 \cdot \frac{20}{3}kgm^2/s^2 = 25kgm^2/s^2.$$

β_2) Θεωρώντας το υλικό σημείο, το οποίο αποκτά κατακόρυφη επιτάχυνση και με δεδομένο ότι ως προς το Ο παρουσιάζει στροφορμή $L_2=m_2\upsilon_2(O\Gamma)$, θα ισχύει:



$$\frac{dL_{2,o}}{dt} = \frac{d(m_2\upsilon_2(O\Gamma))}{dt} = m_2\alpha_2(O\Gamma) \rightarrow$$

$$\frac{dL_{2,o}}{dt} = m_2\alpha_2(O\Gamma) = 15 \cdot \frac{10}{3} \cdot 0{,}5kgm^2/s^2 = 25kgm^2/s^2$$

Με κατεύθυνση, όπως στο σχήμα.

dmargaris@gmail.com