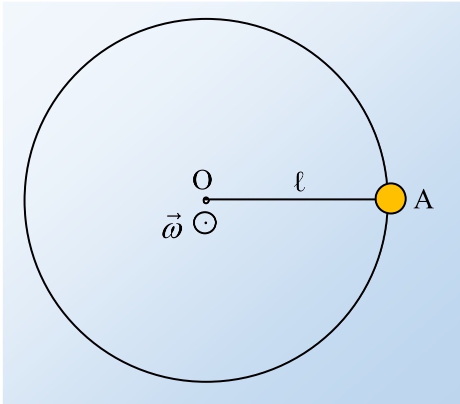
Η χρήση της γωνιακής ταχύτητας



Μια μικρή σφαίρα κινείται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο, διαγράφοντας κυκλική τροχιά κέντρου O, δεμένη στο άκρο νήματος μήκους ℓ, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, κάθετη στο επίπεδο, όπως στο σχήμα, με μέτρο ω=(π/6) rad/s. Τη χρονική στιγμή t=0, η σφαίρα περνά από το σημείο A.

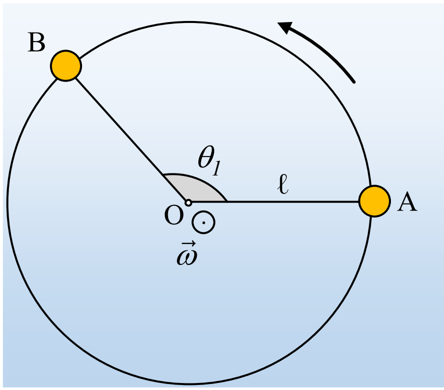
i) Να βρεθεί η θέση B της σφαίρας τη χρονική στιγμή t_1=4s.

ii) Ποια χρονική στιγμή t_2 το σώμα περνά από τη θέση B για $3^η$ φορά;

iii) Αν το μήκος του νήματος είναι ℓ=2m, να υπολογιστεί η γωνία που έχει διαγράψει η επιβατική ακτίνα και το μήκος του τόξου s_2 που έχει διανύσει η σφαίρα, μέχρι τη στιγμή t_2;

iv) Να σχεδιάσετε πάνω στο σχήμα την ταχύτητα και την επιτάχυνση της σφαίρας, τη στιγμή t_1, υπολογίζοντας τα μέτρα τους.

Απάντηση:



i) Η σφαίρα κινείται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση. Με βάση τη φορά του διανύσματος της γωνιακής ταχύτητας, βρίσκουμε ότι κινείται «αριστερόστροφα», με φορά δηλαδή αντίθετη από την φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Έτσι σε χρονικό διάστημα Δt=t_1-0=t_1 η επιβατική ακτίνα διαγράφει γωνία:

$$\theta_1 = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot t_1 = \frac{\pi}{6} \cdot 4 rad = \frac{2\pi}{3} \ rad$$

Στο σχήμα, φαίνεται η σφαίρα στη θέση B και η γωνία που έχει διαγράψει το νήμα $\theta_1 = \frac{2\pi}{3} \ rad$ (θ_1 =120°, γιατί;)

ii) Η περίοδος της κυκλικής κίνησης είναι:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/6} = 12s$$

Η σφαίρα περνά από το σημείο B, για πρώτη φορά, τη στιγμή t_1, για δεύτερη φορά τη στιγμή t_1+T και για τρίτη φορά τη στιγμή t_2=t_1+2T, δηλαδή τη στιγμή:

$$t_2 = t_1 + 2T = 4s + 2 \cdot 12s = 28s$$

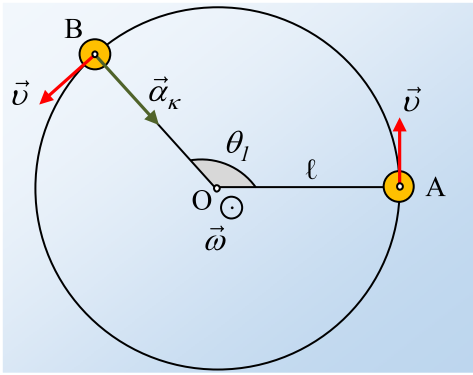
iii) Η γωνία που έχει διαγράψει η επιβατική ακτίνα μέχρι τη στιγμή t_2 είναι ίση:

$$\theta_2 = \omega \cdot \Delta t = \omega \cdot t_2 = \frac{\pi}{6} \cdot 28rad = \frac{14\pi}{3}\ rad = \left(4\pi + \frac{2\pi}{3}\right) rad$$

(αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η συνολική γωνία είναι ίση με την αρχική (2π/3) συν γωνία 4π που είναι η γωνία για τις δύο περιστροφές…).

Η παραπάνω γωνία με το μήκος του αντίστοιχου τόξου, συνδέονται με τη σχέση:

$$\theta_2 = \frac{s_2}{R} \;\rightarrow\; s_2 = \theta_2 R = \frac{14\pi}{3} \cdot 2m = \frac{28\pi}{3} m \approx 29,3m$$



iv) Στο σχήμα έχει σχεδιαστεί η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ εφαπτόμενη στην τροχιά και η επιτάχυνση (η κεντρομόλος επιτάχυνση) $\vec{\alpha}_\kappa$, με κατεύθυνση προς το κέντρο O της κυκλικής τροχιάς, της σφαίρας στη θέση Β. Για τα μέτρα τους έχουμε:

$$\upsilon = \omega R = \omega \ell = \frac{\pi}{6} \cdot 2m/s = \frac{\pi}{3} m/s \approx 1,05 m/s$$

$$a_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = \omega^2 \ell = \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot 2m/s^2 \approx 0,55\ m/s^2.$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης