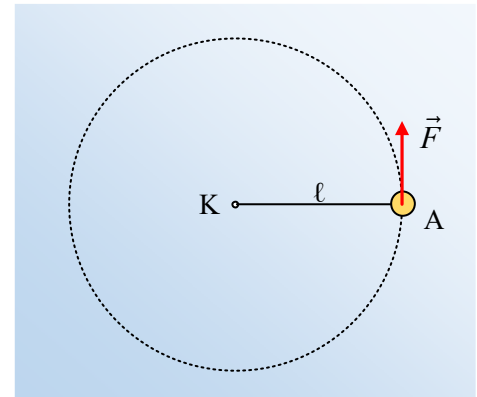


Μια επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση

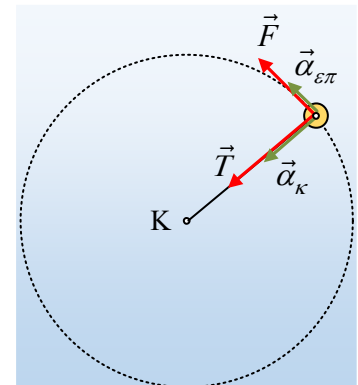
Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στο σημείο A, ηρεμεί ένα μικρό σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ δεμένο στο άκρο μη εκτατού νήματος μήκους $\ell=1\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο K. Σε μια στιγμή $t=0$ ασκούμε στο σώμα μια σταθερού μέτρου δύναμη $F=(\pi/2)\text{N}$, η οποία παραμένει πάντα κάθετη στο νήμα, με αποτέλεσμα το σώμα να διαγράφει τον εστιγμένο κύκλο του σχήματος (σε κάτοψη).



- i) Να υπολογισθεί το μέτρο της επιτάχυνσης που αποκτά το σώμα και που έχει την κατεύθυνση της δύναμης (ονομάζεται επιτρόχια επιτάχυνση, αφού είναι εφαπτόμενη στον κύκλο, επί της τροχιάς).
- ii) Να γίνει η γραφική παράσταση του μέτρου της ταχύτητας, σε συνάρτηση με το χρόνο.
- iii) Σε πόσο χρόνο το σώμα θα ολοκληρώσει την πρώτη πλήρη περιφορά του επιστρέφοντας στην θέση A;
- iv) Να βρεθεί η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1=2\text{s}$.

Απάντηση:

Σε κάθε θέση στο σώμα ασκείται εφαπτομενικά η δύναμη \vec{F} , η οποία προκαλεί μια επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{a}_{\varepsilon\pi}$, υπεύθυνη για την μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας και η τάση του νήματος \vec{T} , με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, η οποία προκαλεί μια κεντρομόλο επιτάχυνση \vec{a}_κ , υπεύθυνη για την αλλαγή της κατεύθυνσης της ταχύτητας.

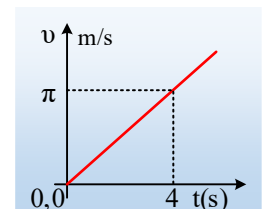


- i) Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην διεύθυνση της εφαπτομένης του κύκλου, παίρνουμε:

$$\Sigma F_\varepsilon = ma_\varepsilon \rightarrow a_\varepsilon = \frac{F}{m} = \frac{\pi/2}{2} \text{ m/s}^2 = \frac{\pi}{4} \text{ m/s}^2$$

- ii) Η παραπάνω επιτάχυνση a_ε αυξάνει το μέτρο της ταχύτητας και αφού έχει σταθερό μέτρο, ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας θα είναι σταθερός. Αλλά τότε γράφουμε:

$$a_{\varepsilon\pi} = \frac{d|v|}{dt} = \frac{\Delta|v|}{\Delta t} = \frac{|v| - 0}{t - 0} \rightarrow |v| = a_{\varepsilon\pi} t \quad (1)$$



Η εξίσωση (1) είναι πρώτου βαθμού και η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία, όπως στο σχήμα.

- iii) Κατά αναλογία με την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, στην οποία έχουμε σταθερή επιτάχυνση, μπορούμε να γράψουμε για το μήκος του τόξου που διαγράφει το σώμα:

$$s = \frac{1}{2} a_{\varepsilon\pi} \cdot t^2 \quad (2)$$

Αλλά τότε τη στιγμή που το σώμα ολοκληρώνει μια περιστροφή, το μήκος του τόξου θα είναι ίσο:

$$s = 2\pi R = 2\pi \cdot \ell,$$

οπότε από την (2) παίρνουμε:

$$s = \frac{1}{2} a_{\varepsilon\pi} \cdot t^2 \rightarrow 2\pi \cdot \ell = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} t^2 \rightarrow$$

$$t = \sqrt{16s} = 4s$$

iv) Τη στιγμή t_1 το σώμα έχει διανύσει τόξο μήκους:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_{\varepsilon\pi} \cdot t^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \cdot 2^2 m = \frac{\pi}{2} m.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι το μήκος του κύκλου είναι $s = 2\pi \cdot \ell = 2\pi$ (m), τότε το σώμα έχει διαγράψει:

$$\frac{\pi/2}{2\pi} = 1/4 \text{ του κύκλου,}$$

ευρισκόμενο στη θέση B, του σχήματος, έχοντας διαγράψει γωνία 90° .

Στη θέση αυτή έχει ταχύτητα, εφαπτόμενη στον κύκλο, μέτρου:

$$v_1 = \alpha_{\varepsilon\pi} t_1 = \frac{\pi}{4} \cdot 2 m / s = \frac{\pi}{2} m / s$$

Εξάλλου η κεντρομόλος επιτάχυνση του σώματος με κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς, έχει μέτρο:

$$a_{\kappa} = \frac{v_1^2}{R} = \frac{(\pi/2)^2}{1} m / s^2 \approx 2,5 m / s^2$$

Αλλά τότε η επιτάχυνση του σώματος στη θέση B, θα προκύψει από την σύνθεση της επιτρόχιας και της κεντρομόλου επιτάχυνσης, όπου με τη βοήθεια του πυθαγορείου θεωρήματος, θα πάρουμε:

$$\alpha_1 = \sqrt{\alpha_{\kappa}^2 + \alpha_{\varepsilon}^2} = \sqrt{2,5^2 + (\pi/4)^2} m / s^2 \approx 2,6 m / s^2$$

Ενώ η κατεύθυνσή της σχηματίζει με την ακτίνα BK γωνία θ , όπου:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\alpha_{\varepsilon\pi}}{\alpha_{\kappa}} = \frac{\pi/4}{2,5} = 0,314$$

